* تمرين: ليكن A جبر لي فوق الحقل R وليكن $a \in A$

العلاقة $d_a : A \to A$

المعرفة بالشكل:

$$\forall x \in A ; d_a(x) = [a, x]$$

هي تطبيق اشتقاق على A

البرهان:

- إن d_a تطبيق:

$$\forall x, y \in A ; x = y$$

$[a, x] = [a, y]$ لأن $[\,,\,]$ تطبيق

$$\Rightarrow d_a(x) = d_a(y)$$

- 1) $\forall x, y \in A ; d_a(x+y) = [a, x+y]$

$$= [a, x] + [a, y] = d_a(x) + d_a(y)$$

2) $\forall \alpha \in R ; d_a(\alpha x) = [a, \alpha x] = \alpha [a, x] = \alpha d_a(x)$

3) $d_a([x, y]) = [a, [x, y]] = [d_a(x), y] + [x, d_a(y)]$

لأن:

لدينا: $[a, [x, y]] + [x, [y, a]] + [y, [a, x]] = 0$

$$[a, [x, y]] = -[x, [y, a]] - [y, [a, x]]$$

$$= [[a, x], y] - [x, [a, y]] = [[a, x], y] + [x, [a, y]]$$

$$= [d_a(x), y] + [x, d_a(y)]$$

تعريف: لأجل أي جبر لي فوق الحلقة R فإن مجموعة تطبيقات الاشتقاق ليست خالية.
- لأن $0 \in A$، وبالتالي $0 \in Der(A)$

* تعريف: ليكن A جبر لي فوق الحلقة $\mathbb{R}$ لنعرف على المجموعة $Der(A)$ العمليات الآتية:

-1- $+ : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$

$(d_1, d_2) \longmapsto d_1 + d_2$

$Der(A)$ مغلقة بالنسبة للعمليتين؟

-2- $\bullet : R \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$

$(\alpha, d) \longmapsto \alpha d$

الإثبات:

$d_1 + d_2 : A \longrightarrow A$

$\forall x \in A ; \ (d_1 + d_2)(x) = d_1(x) + d_2(x)$

1) $\forall x, y \in A ; (d_1 + d_2)(x + y) = d_1(x + y) + d_2(x + y)$

$= d_1(x) + d_1(y) + d_2(x) + d_2(y)$

$= (d_1 + d_2)(x) + (d_1 + d_2)(y)$

2) $\forall \alpha \in R ; \quad (d_1 + d_2)(\alpha x) = d_1(\alpha x) + d_2(\alpha x)$

$= \alpha d_1(x) + \alpha d_2(x) = \alpha [d_1(x) + d_2(x)]$
$= \alpha (d_1 + d_2)(x)$

3) $\forall x, y \in A ; (d_1 + d_2)([x, y]) = d_1([x, y]) + d_2([x, y])$

$= [d_1 x, y] + [x, d_1(y)] + [d_2(x), y] + [x, d_2(y)]$

$= [d_1 x + d_2(x), y] + [x, d_1(y) + d_2(y)]$

$= [(d_1+d_2)(x), y] + [x, (d_1+d_2)(y)]$

وهذا يبين أن d_1+d_2 هو تفريق اشتقاق على A.

وبالتالي $d_1+d_2 \in Der(A)$

تمت البرهان: أثبت أن $(Der(A), +)$ زمرة تبديلية وكذلك

$\alpha . d : A \longrightarrow A$

$\forall x \in A ; \quad \alpha . d(x) \longmapsto = \alpha . d(x)$

- $\forall x, y \in A ; (\alpha d)(x+y) = \alpha d(x+y) = \alpha (d(x) + d(y))$

$= \alpha . d(x) + \alpha . d(y) = (\alpha d)(x) + (\alpha d)(y)$

- $\forall \beta \in R ; (\alpha d)(\beta x) = \alpha (d(\beta x)) = \alpha (\beta d(x))$

$= (\alpha \beta) d(x) = (\beta \alpha) d(x) = \beta . (\alpha . d(x))$

$= \beta (\alpha d)(x)$

$(\alpha d)([x, y]) = \alpha (d[x, y]) = \alpha ([d x, y] + [x, d y])$

$= \alpha . [d(x), y] + \alpha [x, d(y)] = [\alpha d(x), y] + [x, \alpha d y]$

$$= [(\alpha d)(x), y] + [x, (\alpha d)(y)]$$

إذاً αd تمثيل اشتقاق على A.

تمرين: التحقق من الشرط الأول و الثاني.

مما سبق نجد أن $Der(A)$ هي موديول فوق R.

* مبرهنة: ليكن A جبر لي معطى فوق R، المجموعة $Der(A)$ تشكل جبر لي فوق R بالنسبة لعملية الضرب

$$[\ ,\ ] : Der(A) \times Der(A) \longrightarrow Der(A)$$

$$(d_1, d_2) \longmapsto [d_1, d_2]$$

حيث

$$[d_1, d_2] = d_1 d_2 - d_2 d_1$$

البرهان:

$$[d_1, d_2](x+y) = d_1 d_2 (x+y) - d_2 d_1 (x+y)$$

$$= d_1(d_2(x+y)) - d_2(d_1(x+y))$$

$$= d_1(d_2(x) + d_2(y)) - d_2(d_1(x) + d_1(y))$$

$$= d_1 d_2(x) + d_1 d_2(y) - d_2 d_1(x) + d_2 d_1(y)$$

$$= (d_1 d_2)(x) + (d_1 d_2)(y) - (d_2 d_1)(x) - (d_2 d_1)(y)$$

$$= (d_1 d_2)(x) - (d_2 d_1)(x) + (d_1 d_2)(y) - d_2 d_1(y)$$

$$= [d_1, d_2](x) + [d_1, d_2](y)$$

• $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x \in A$; $[d_1,d_2](\alpha x) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)(\alpha x)$

$= d_1 d_2(\alpha x) - d_2 d_1(\alpha x) = d_1(d_2(\alpha x)) - d_2(d_1(\alpha x))$

$= d_1(\alpha d_2(x)) - d_2(\alpha d_1(x)) = \alpha d_1(d_2(x)) - \alpha d_2(d_1(x))$

$= \alpha (d_1 d_2)(x) - \alpha d_2 d_1(x) = \alpha [d_1,d_2](x)$

• $[d_1,d_2]([x,y]) = (d_1 d_2 - d_2 d_1)([x,y])$

$= d_1 d_2([x,y]) - d_2 d_1([x,y]) = d_1(d_2[x,y]) - d_2(d_1[x,y])$

$= d_1([d_2(x),y] + [x,d_2(y)]) + d_2([d_1(x),y] + [x,d_1(y)])$

$= d_1([d_2(x),y]) + d_1([x,d_2(y)]) - d_2([d_1(x),y]) - d_2([x,d_1(y)])$

$= [d_1 d_2(x),y] + [d_2(x),d_1(y)] + [d_1(x),d_2(y)] + [x,d_1 d_2(y)]$

$- [d_2 d_1(x),y] - [d_1(x),d_2(y)] - [d_2(x),d_1(y)] - [x,d_2 d_1(y)]$

$= [d_1 d_2(x),y] + [x,d_1 d_2(y)] - [d_2 d_1(x),y] - [x,d_2 d_1(y)]$

~~$[d_1 d_2(x),y] - [d_2 d_1(x),y]$~~ $+ [$

$= [d_1 d_2(x) - d_2 d_1(x),y] + [x, d_1 d_2(y) - d_2 d_1(y)]$

$= [[d_1,d_2](x),y] + [x,[d_1,d_2](y)]$

/ /   الموضوع : ....

ومنه نجد أن $[d_1, d_2]$ تطبيق اشتقاق على A (A جبر لي)

لنبرهن على شروط جبر لي :

1) $\forall \; d \in Der A \; ; \; [d, d] = dd - dd = 0$

2) $\forall \; d_1, d_2, d_3 \in Der A \; ; \; [d_1 + d_2, d_3] \overset{?}{=} [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$

$[d_1 + d_2, d_3] = (d_1 + d_2) d_3 - d_3 (d_1 + d_2)$

$= d_1 d_3 + d_2 d_3 - d_3 d_1 - d_3 d_2$

$= d_1 d_3 - d_3 d_1 + d_2 d_3 - d_3 d_2$

$= [d_1, d_3] + [d_2, d_3]$

بنفس الطريقة نجد أن : $[d_1, d_2 + d_3] = [d_1, d_2] + [d_1, d_3]$

3)

$\forall \alpha \in R \; ; \; \alpha [d_1, d_2] = \alpha (d_1 d_2 - d_2 d_1)$

$= \alpha d_1 d_2 - \alpha d_2 d_1 = (\alpha d_1) d_2 - d_2 (\alpha d_1)$

$= [\alpha d_1, d_2]$

$\alpha d_1 d_2 - \alpha d_2 d_1 = d_1 (\alpha d_2) - (\alpha d_2) d_1$

$= [d_1, \alpha d_2]$

انتهى